



Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzell

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 7 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
10. Dezember 2021

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte). (i) Zeigen Sie, dass die Gleichung $(1 + x^2)\sqrt{x} = 1$ eine Lösung in $[0, \infty[$ besitzt. Sie brauchen die Lösung nicht explizit anzugeben.

(ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Es existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

Lösung. (i) Für $x \geq 1$ ist

$$(1 + x^2)\sqrt{x} \geq 2,$$

also muss eine potentielle Lösung der Gleichung im Intervall $[0, 1]$ liegen. Sei

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (1 + x^2)\sqrt{x}.$$

Als Produkt stetiger Funktionen ist f stetig. Weiter gilt $f(0) = 0$ und $f(1) = 2 > 1$, also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0, 1]$ mit $f(\xi) = 1$. Dies ist die gewünschte Lösung.

(ii) Sei

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - f(x).$$

Als Differenz stetiger Funktionen ist g stetig. Weiter gilt

$$g(a) = a - f(a) \leq 0, \quad g(b) = b - f(b) \geq 0,$$

also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b]$ mit $g(\xi) = 0$, oder äquivalent $f(\xi) = \xi$. $\square$

Aufgabe 2 (10 Punkte). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn f entweder streng monoton fallend oder streng monoton wachsend ist.

Lösung. “ $\Rightarrow$ ”: Ist f streng monoton fallend oder streng monoton wachsend, so ist f offensichtlich injektiv.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei f injektiv. Zu zeigen: f ist streng monoton fallend oder streng monoton wachsend. Seien $x, y, z \in]a, b[$ mit $x < y < z$. Angenommen,

$$f(y) = \max\{f(x), f(y), f(z)\}. \quad (1)$$

Dann folgt aus Injektivität $f(y) > f(x)$ und $f(y) > f(z)$. Setzen wir

$$\eta := \frac{f(y) + \max\{f(x), f(z)\}}{2},$$

so ist $f(x) < \eta < f(y)$, also gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi_1 \in]x, y[$ mit $f(\xi_1) = \eta$. Ebenso gilt $f(z) < \eta < f(y)$, also gibt es wieder nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi_2 \in]y, z[$ mit $f(\xi_2) = \eta$. Wegen $\xi_1 < \xi_2$ erhalten wir einen Widerspruch zur Injektivität von f . Die Annahme (1) war also falsch. Mit einer analogen Begründung folgern wir

$$f(y) \neq \min\{f(x), f(y), f(z)\}.$$

Also ist entweder

$$f(x) < f(y) < f(z) \quad \text{oder} \quad f(x) > f(y) > f(z). \quad (2)$$

Wir fixieren nun zwei beliebige Zahlen $\alpha, \beta \in]a, b[$. Wir unterscheiden die beiden Fälle $f(\alpha) < f(\beta)$ und $f(\alpha) > f(\beta)$ (Gleichheit ist ausgeschlossen wegen Injektivität). Angenommen $f(\alpha) < f(\beta)$. Wir behaupten, dass dann f streng monoton wachsend sein muss. In der Tat: Seien $x_1, x_2 \in]a, b[$ mit $x_1 < x_2$. Falls $x_1 = \alpha, x_2 = \beta$ sind wir fertig. Falls $x_1 \neq \alpha, x_2 = \beta$, ist

$$\alpha < x_1 < \beta \quad \text{oder} \quad x_1 < \alpha < \beta$$

und $f(x_1) < f(\beta) = f(x_2)$ folgt aus (2). Der Fall ist $x_1 = \alpha, x_2 \neq \beta$ ist identisch. Es verbleibt der Fall $x_1 \neq \alpha, x_2 \neq \beta$. Wir ordnen die Menge $\{\alpha, \beta, x_1, x_2\}$ der Größe nach. Eine Möglichkeit ist

$$x_1 < \alpha < \beta < x_2.$$

Wenden wir (2) erst auf die Elemente x_1, α, β und dann auf α, β, x_2 an, so folgt

$$f(x_1) < f(\alpha) < f(\beta) < f(x_2),$$

also wieder $f(x_1) < f(x_2)$. Alle anderen Möglichkeiten laufen erneut identisch. Dies zeigt, dass f streng monoton wachsend ist.

Ist nun $f(\alpha) > f(\beta)$, verfahren wir genauso wie vorher, um zu zeigen, dass f streng monoton fallend sein muss (mit der zweiten Option in (2)). $\square$

Aufgabe 3 (10 Punkte). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Beweisen Sie: Jede gleichmäßig stetige Funktion $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt.

Bemerkung: Man beachte, dass der Definitionsbereich von f kein abgeschlossenes Intervall ist.

Lösung. Da f gleichmäßig stetig ist, finden wir zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in]a, b[$ mit $|x - y| < \delta$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < 1.$$

Durch eventuelle Verkleinerung von δ können wir annehmen, dass $a + \delta < b - \delta$ und somit $[a + \delta, b - \delta] \subseteq]a, b[$. Aus einem Satz der Vorlesung folgt, dass f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a + \delta, b - \delta]$ beschränkt ist, d.h. es existiert ein $M > 0$ mit

$$|f(x)| \leq M$$

für alle $x \in [a + \delta, b - \delta]$. Für jedes $x \in]a, a + \delta[$ ist nun

$$|(a + \delta) - x| = a + \delta - x < \delta,$$

also nach Definition von δ

$$|f(x)| = |f(a + \delta) - f(x)| + |f(a + \delta)| < 1 + |f(a + \delta)|.$$

Analog zeigt man, dass $|f(x)| < 1 + |f(b - \delta)|$ für alle $x \in]b - \delta, b[$ gilt. In jedem Fall ist f beschränkt. Eine gemeinsame obere Schranke für alle $x \in]a, b[$ ist

$$|f(x)| \leq C := \max\{M, 1 + |f(b - \delta)|, 1 + |f(a + \delta)|\}.$$

□

Aufgabe 4 (2 + 4 + 4 Punkte). Diese Aufgabe liefert ein Beispiel für eine Funktion, die beschränkt und stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $x_n := 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Definiere $f: [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_{2n}}{x_{2n+1} - x_{2n}}(x_{2n+1} - x) & \text{falls } x \in [x_{2n}, x_{2n+1}[\text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{x_{2n+2}}{x_{2n+2} - x_{2n+1}}(x - x_{2n+1}) & \text{falls } x \in [x_{2n+1}, x_{2n+2}[\text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

- (i) Skizzieren Sie f .
- (ii) Zeigen Sie: f ist stetig und beschränkt,
- (iii) f ist nicht gleichmäßig stetig.

Lösung. (ii) Zur Beschränktheit: Für $x \in [x_{2n}, x_{2n+1}[$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\frac{x_{2n}}{x_{2n+1} - x_{2n}}(x_{2n+1} - x) \leq \frac{x_{2n}}{x_{2n+1} - x_{2n}}(x_{2n+1} - x_{2n}) = x_{2n} \leq 1.$$

und für $x \in [x_{2n+1}, x_{2n+2}[$ mit $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{x_{2n+2}}{x_{2n+2} - x_{2n+1}}(x - x_{2n+1}) \leq x_{2n+2} \leq 1.$$

Also ist f beschränkt durch 1.

Zur Stetigkeit: Die Funktion f ist auf jedem offenen Intervall $]x_{2n}, x_{2n+1}[$ bzw. $]x_{2n+1}, x_{2n+2}[$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ eine affin-lineare Funktion der Form $x \mapsto ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und damit bekanntermaßen stetig. Es ist also nur Stetigkeit in den Punkten x_{2n} und x_{2n+1} mit $n \in \mathbb{N}_0$ zu untersuchen (Überlegen Sie sich hier genau mit der Definition von Stetigkeit, warum das ausreicht! Für Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt ist nur das Verhalten der Funktion “ganz nah” an dem Punkt entscheidend).

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig (für $n = 0$ ist $x_{2n} = 0$ und f ist konstant 0 auf dem Intervall $[0, x_1[$, also dort stetig). Wir zeigen Stetigkeit im Punkt x_{2n} . Dazu zeigen wir, dass links- und rechtsseitige Grenzwerte der Funktion bei x_{2n} existieren und mit $f(x_{2n})$ übereinstimmen. Dann folgt die Stetigkeit aus Tutoriumsblatt 7, Aufgabe 4. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $D \cap]-\infty, x_{2n}[= [0, x_{2n}[$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_{2n}.$$

Für genügend großes k ist dann $x_k \in [x_{2n-1}, x_{2n}[$, und es folgt für solche k

$$f(x_k) = \frac{x_{2n}}{x_{2n} - x_{2n-1}}(x_k - x_{2n-1}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{x_{2n}}{x_{2n} - x_{2n+1}}(x_{2n} - x_{2n+1}) = x_{2n},$$

also ist $\lim_{x \nearrow x_{2n}} f(x) = x_{2n} = f(x_{2n})$. Analog folgt durch Betrachtung einer Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $D \cap]x_{2n}, \infty[=]x_{2n}, 1[$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_{2n}$, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = x_{2n}$, also $\lim_{x \searrow x_{2n}} f(x) = x_{2n} = f(x_{2n})$ und f ist in x_{2n} stetig. Genauso zeigt man, dass f in jedem Punkt x_{2n+1} mit $n \in \mathbb{N}_0$ stetig ist.

(iii) Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sei $\delta > 0$ beliebig. Sei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $2^{-(n+1)} < \delta$. Dann ist

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \delta,$$

aber

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| = x_n \geq \frac{1}{2}$$

für gerade $n \in \mathbb{N}$ und

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| = x_{n+1} \geq \frac{1}{2}$$

für ungerade $n \in \mathbb{N}$. Also ist f nicht gleichmäßig stetig. □